DEVOIR DE REVISION CONTROLE N°2

EXERCICE N°1 :	30'	5 points	

Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère l'ensemble S_m des points $M(x,y,z)$ de ξ tels que : $x^2+y^2+z^2+2(m-1)x-2my+2(m+1)z+3m^2-7=0$

1) Montrer que pour tout réel m , S_m est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre Ω_m et le rayon R .
2) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
3) Soit P le plan d'équation cartésienne : $x+2y+z+3\sqrt{6}=0$.
   a) Montrer que le plan P est tangente à toutes les sphères S_m .
   b) Déterminer les coordonnées du point H_m : point de contact de P avec S_m .
4) Soit D la droite passant par le point A(0, 1, 1) est de vecteur directeur $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{k}$.
   Trouver les coordonnées des points d'intersection de D et de S_1 .
5) Déterminer une équation cartésienne du plan Q contenant la droite D et perpendiculaire au plan P.
6) Montrer que Q et S_1 se coupent suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE N°2 :	35'	7 points	

Soit f la fonction définie par: $\begin{cases} f(x)=x+1+\sqrt{x^2-1} & si \quad x<-1 \\ f(x)=\frac{1}{2}(2-x)\sqrt{x+1} & si \quad x\geq -1 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier la dérivabilité de f en (-1). Interpréter le résultat obtenu.
c) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Calculer $f'(x)$, pour tout réel $x \neq -1$
d) Dresser le tableau de variations de f.

1) On désigne par g la restriction de f à $]-\infty,-1[$
   a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty,-1[$ sur $]0,1[$. On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
   b) Déterminer $g^{-1}(x)$; pour tout $x \in]0,1[$.
   c) Construire dans un même repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}^{-1}$, de f et g^{-1}.
2) On considère la fonction h définie sur [0,1]par : h(x) = f(x) – x
   Montrer que l'équation h(x) = 0 ; admet une solution unique α .Encadrer α au dixième près.
3) Soit U la suite définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que pour tout x$\in$ [0,1] ; $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n-\alpha|$.
   c) En déduire que la suite U est convergente vers α .

EXERCICE N°3 : | 15' | 3 points

Soit h la fonction définie sur [-1 ; 1] par $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{5 - 2x^2}}$

On désigne par (C) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer la primitive H sur [-1 ; 1] de la fonction h qui s'annule pour x = 0.
2. Sans tracer la courbe (C), donner l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives x = 0 , x = 1 et y = 0.

EXERCICE N°4 : | 30' | 5 points

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx, \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Montrer, En utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1}\cos x\,dx$,

3) a) Montrer, En utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$; $I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$

b) En déduire I_2 et I_3.

c) Calculer, alors, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2x + x^2 - x^3\right)\sin x\,dx$.